Series : WXYZ/S **SET~3**

प्रश्न-पत्र कोड
Q.P. Code **65/S/3**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी प्रश्न-पत्र कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें।
Candidates must write the Q.P. Code on the title page of the answer-book.

गणित
MATHEMATICS

*निर्धारित समय : **3** घण्टे* *अधिकतम अंक : **80***
*Time allowed : **3** hours* *Maximum Marks : **80***

नोट

(I) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **23** हैं।

(II) प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए प्रश्न-पत्र कोड को परीक्षार्थी उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें।

(III) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **38** प्रश्न हैं।

(IV) **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, उत्तर-पुस्तिका में यथा स्थान पर प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।**

(V) इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है। प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा। 10.15 बजे से 10.30 बजे तक परीक्षार्थी केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे।

NOTE

(I) Please check that this question paper contains **23** printed pages.

(II) Q.P. Code given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.

(III) Please check that this question paper contains **38** questions.

(IV) **Please write down the Serial Number of the question in the answer-book at the given place before attempting it.**

(V) 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the candidates will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period. #

सामान्य निर्देश :

निम्नलिखित निर्देशों को बहुत सावधानी से पढ़िए और उनका सख़्ती से पालन कीजिए :

(i) इस प्रश्न-पत्र में **38** प्रश्न हैं। **सभी** प्रश्न **अनिवार्य** हैं।

(ii) यह प्रश्न-पत्र **पाँच** खण्डों में विभाजित है – **क, ख, ग, घ** एवं **ङ**।

(iii) **खण्ड क** में प्रश्न संख्या **1** से **18** तक बहुविकल्पीय (MCQ) तथा प्रश्न संख्या **19** एवं **20** अभिकथन एवं तर्क आधारित **1** अंक के प्रश्न हैं।

(iv) **खण्ड ख** में प्रश्न संख्या **21** से **25** तक अति लघु-उत्तरीय (VSA) प्रकार के **2** अंकों के प्रश्न हैं।

(v) **खण्ड ग** में प्रश्न संख्या **26** से **31** तक लघु-उत्तरीय (SA) प्रकार के **3** अंकों के प्रश्न हैं।

(vi) **खण्ड घ** में प्रश्न संख्या **32** से **35** तक दीर्घ-उत्तरीय (LA) प्रकार के **5** अंकों के प्रश्न हैं।

(vii) **खण्ड ङ** में प्रश्न संख्या **36** से **38** तक प्रकरण अध्ययन आधारित **4** अंकों के प्रश्न हैं।

(viii) प्रश्न-पत्र में समग्र विकल्प नहीं दिया गया है। यद्यपि, खण्ड ख के 2 प्रश्नों में, खण्ड ग के 3 प्रश्नों में, खण्ड घ के 2 प्रश्नों में तथा खण्ड ङ के 2 प्रश्नों में आंतरिक विकल्प का प्रावधान दिया गया है।

(ix) कैल्कुलेटर का उपयोग **वर्जित** है।

खण्ड क

इस खण्ड में बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQ) हैं, जिनमें प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान है :

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

General Instructions :

Read the following instructions very carefully and strictly follow them :

(i) *This question paper contains* ***38*** *questions.* ***All*** *questions are* ***compulsory****.*

(ii) *This question paper is divided into* ***five*** *Sections –* ***A, B, C, D*** *and* ***E****.*

(iii) *In* ***Section A,*** *Questions no.* ***1*** *to* ***18*** *are multiple choice questions (MCQs) and questions number* ***19*** *and* ***20*** *are Assertion-Reason based questions of* ***1*** *mark each.*

(iv) *In* ***Section B,*** *Questions no.* ***21*** *to* ***25*** *are very short answer (VSA) type questions, carrying* ***2*** *marks each.*

(v) *In* ***Section C,*** *Questions no.* ***26*** *to* ***31*** *are short answer (SA) type questions, carrying* ***3*** *marks each.*

(vi) *In* ***Section D,*** *Questions no.* ***32*** *to* ***35*** *are long answer (LA) type questions carrying* ***5*** *marks each.*

(vii) *In* ***Section E,*** *Questions no.* ***36*** *to* ***38*** *are case study based questions carrying* ***4*** *marks each.*

(viii) *There is no overall choice. However, an internal choice has been provided in 2 questions in Section B, 3 questions in Section C, 2 questions in Section D and 2 questions in Section E.*

(ix) *Use of calculator is* ***not*** *allowed.*

SECTION A

This section comprises multiple choice questions (MCQs) of 1 mark each.

1. The principal value of $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ is :

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

2. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ है, एक :

(A) तत्समक आव्यूह (B) अदिश आव्यूह

(C) सममित आव्यूह (D) विषम-सममित आव्यूह

3. यदि $[3x \quad 5].\begin{bmatrix} x \\ -15 \end{bmatrix} = 0$ है, तो x का मान है :

(A) शून्य (B) 5

(C) $2\sqrt{5}$ (D) ± 5

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $|3A| = k|A|$ है, तो k का मान है :

(A) 3 (B) 9

(C) 6 (D) 27

5. शीर्षों $(4, -1)$, $(1, k)$ तथा $(-2, -1)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई है। k का मान है :

(A) 8 (B) -8

(C) 2 (D) 6

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ है, तो $|\text{adj } A|$ का मान है :

(A) 5 (B) 25

(C) -5 (D) -25

2. The matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ is :

(A) an identity matrix (B) a scalar matrix

(C) a symmetric matrix (D) a skew-symmetric matrix

3. If $[3x \quad 5].\begin{bmatrix} x \\ -15 \end{bmatrix} = 0$, then the value of x is :

(A) zero (B) 5

(C) $2\sqrt{5}$ (D) ± 5

4. If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ and $|3A| = k|A|$, then the value of k is :

(A) 3 (B) 9

(C) 6 (D) 27

5. The area of a triangle with vertices (4, –1), (1, k) and (–2, –1) is 9 sq units. The value of k is :

(A) 8 (B) – 8

(C) 2 (D) 6

6. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, then the value of $|\text{adj } A|$ is :

(A) 5 (B) 25

(C) – 5 (D) – 25

7. यदि $\frac{d}{dx}f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^4}$ इस प्रकार है कि $f(1) = 0$ है, तो $f(x)$ है :

(A) $6x + \frac{12}{x^5}$

(B) $x^4 - \frac{1}{x^3} + 2$

(C) $x^3 + \frac{1}{x^3} - 2$

(D) $x^3 + \frac{1}{x^3} + 2$

8. यदि $x = \sin t$ तथा $y = \cos t$ है, तो $t = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ है :

(A) -1 (B) 2

(C) $2\sqrt{2}$ (D) $-2\sqrt{2}$

9. रेखा $y = x$, y-अक्ष तथा रेखाओं $y = 0$ तथा $y = 4$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(A) 16 वर्ग इकाई (B) 8 वर्ग इकाई

(C) 4 वर्ग इकाई (D) 2 वर्ग इकाई

10. व्यवरोधों $x + y \le 1$, $x, y \ge 0$ के अंतर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान है :

(A) 3 (B) 4

(C) 7 (D) 0

7. If $\frac{d}{dx} f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^4}$ such that f(1) = 0, then f(x) is :

(A) $6x + \frac{12}{x^5}$

(B) $x^4 - \frac{1}{x^3} + 2$

(C) $x^3 + \frac{1}{x^3} - 2$

(D) $x^3 + \frac{1}{x^3} + 2$

8. If x = sin t and y = cos t, then $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $t = \frac{\pi}{4}$ is :

(A) -1 (B) 2

(C) $2\sqrt{2}$ (D) $-2\sqrt{2}$

9. The area bounded by the line y = x, y-axis and the lines y = 0 and y = 4 is :

(A) 16 sq units (B) 8 sq units

(C) 4 sq units (D) 2 sq units

10. The maximum value of Z = 3x + 4y subject to the constraints $x + y \leq 1$, $x, y \geq 0$ is :

(A) 3 (B) 4

(C) 7 (D) 0

11. एक LPP में, रैखिक निकाय व्यवरोधों द्वारा बने सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (1, 1), (3, 0) तथा (0, 3) हैं। यदि $Z = ax + by$, जहाँ $a, b > 0$ का न्यूनतमीकरण करना हो और Z का न्यूनतम मान (3, 0) तथा (1, 1) पर हो, तो a तथा b के बीच का संबंध होगा :

(A) $a = 2b$

(B) $a = \frac{b}{2}$

(C) $a = 3b$

(D) $a = b$

12. यदि $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ है, तो $|\vec{a} + \vec{b}|$ का मान है :

(A) 9

(B) 3

(C) – 3

(D) 2

13. $\int \frac{\cot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ बराबर है :

(A) $\log \sin \sqrt{x} + C$

(B) $\frac{\log \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + C$

(C) $2 \log \sin \sqrt{x} + C$

(D) $\frac{\log \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + C$

14. यदि एक गोले के आयतन के परिवर्तन की दर उसकी त्रिज्या के परिवर्तन की दर से दुगुनी है, तो गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल है :

(A) 1 वर्ग इकाई

(B) 2 वर्ग इकाई

(C) 3 वर्ग इकाई

(D) 4 वर्ग इकाई

11. In an LPP, corner points of the feasible region determined by the system of linear constraints are (1, 1), (3, 0) and (0, 3). If $Z = ax + by$, where $a, b > 0$ is to be minimized, the condition on a and b, so that the minimum of Z occurs at (3, 0) and (1, 1), will be :

(A) $a = 2b$

(B) $a = \frac{b}{2}$

(C) $a = 3b$

(D) $a = b$

12. If $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, then the value of $|\vec{a} + \vec{b}|$ is :

(A) 9

(B) 3

(C) -3

(D) 2

13. $\int \frac{\cot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ is equal to :

(A) $\log \sin \sqrt{x} + C$

(B) $\frac{\log \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + C$

(C) $2 \log \sin \sqrt{x} + C$

(D) $\frac{\log \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + C$

14. If the rate of change of volume of a sphere is twice the rate of change of its radius, then the surface area of the sphere is :

(A) 1 sq unit

(B) 2 sq units

(C) 3 sq units

(D) 4 sq units

15. यदि ‘m’ तथा ‘n’ क्रमशः अवकल समीकरण $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \frac{d^2y}{dx^2}$ की घात तथा कोटि हैं, तो $(m + n)$ का मान है :

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 5

16. एक सिक्का 3 बार उछाला गया। कम-से-कम दो बार चित आने की प्रायिकता है :

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{8}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{1}{4}$

17. दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$ है। दोनों सदिशों के बीच का कोण है :

(A) $30°$ (B) $60°$

(C) $45°$ (D) $90°$

18. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1+y}{x}$ का समाकलन गुणक है :

(A) $\log x$ (B) $-\log x$

(C) $e^x - x$ (D) $\frac{e^x}{x}$

15. If 'm' and 'n' are the degree and order respectively of the differential equation $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \frac{d^2y}{dx^2}$, then the value of (m + n) is :

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 5

16. A coin is tossed three times. The probability of getting at least two heads is :

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{8}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{1}{4}$

17. Two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are such that $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$. The angle between the two vectors is :

(A) 30° (B) 60°

(C) 45° (D) 90°

18. The integrating factor of the differential equation $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1+y}{x}$ is :

(A) $\log x$ (B) $-\log x$

(C) $e^x - x$ (D) $\frac{e^x}{x}$

*प्रश्न संख्या **19** और **20** अभिकथन एवं तर्क आधारित प्रश्न हैं। दो कथन दिए गए हैं जिनमें एक को अभिकथन (A) तथा दूसरे को तर्क (R) द्वारा अंकित किया गया है। इन प्रश्नों के सही उत्तर नीचे दिए गए कोड (A), (B), (C) और (D) में से चुनकर दीजिए।*

(A) अभिकथन (A) और तर्क (R) दोनों सही हैं और तर्क (R), अभिकथन (A) की सही व्याख्या करता है।

(B) अभिकथन (A) और तर्क (R) दोनों सही हैं, परन्तु तर्क (R), अभिकथन (A) की सही व्याख्या ***नहीं*** करता है।

(C) अभिकथन (A) सही है, परन्तु तर्क (R) ग़लत है।

(D) अभिकथन (A) ग़लत है, परन्तु तर्क (R) सही है।

19. *अभिकथन (A) :* महत्तम पूर्णांक फलन $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$ में, $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है।

तर्क (R) : महत्तम पूर्णांक फलन किसी भी पूर्णांकीय मान पर संतत नहीं होता।

20. फलन $f : R \longrightarrow R$ पर विचार कीजिए, जिसे $f(x) = x^3$ के रूप में परिभाषित किया गया है।

अभिकथन (A) : $f(x)$ एक एकैकी फलन है।

तर्क (R) : यदि फलन का सहप्रान्त इसके परिसर के समान हो, तो $f(x)$ एकैकी फलन होता है।

खण्ड ख

इस खण्ड में अति लघु-उत्तरीय (VSA) प्रकार के 5 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के 2 अंक हैं।

21. यदि $e^y (x + 1) = 1$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -e^y$.

22. (क) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

(ख) सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), x \in [0, 1]$$

*Questions number **19** and **20** are Assertion and Reason based questions. Two statements are given, one labelled Assertion (A) and the other labelled Reason (R). Select the correct answer from the codes (A), (B), (C) and (D) as given below.*

(A) Both Assertion (A) and Reason (R) are true and Reason (R) is the correct explanation of the Assertion (A).

(B) Both Assertion (A) and Reason (R) are true, but Reason (R) is ***not*** the correct explanation of the Assertion (A).

(C) Assertion (A) is true, but Reason (R) is false.

(D) Assertion (A) is false, but Reason (R) is true.

19. *Assertion (A) :* $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$, the greatest integer function is not differentiable at $x = 2$.

Reason (R) : The greatest integer function is not continuous at any integral value.

20. Consider the function $f : R \longrightarrow R$, defined as $f(x) = x^3$.

Assertion (A) : $f(x)$ is a one-one function.

Reason (R) : $f(x)$ is a one-one function, if co-domain = range.

SECTION B

This section comprises 5 very short answer (VSA) type questions of 2 marks each.

21. If $e^y (x + 1) = 1$, prove that $\dfrac{dy}{dx} = - e^y$.

22. (a) Find the principal value of $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

OR

(b) Prove that :

$$\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), x \in [0, 1]$$

23. एक गोलाकार गुब्बारे का परिवर्तनशील व्यास $\frac{2}{3}(2t + 1)$ है। t के सापेक्ष इसके आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

24. रेखाओं $\vec{r} = (3 + 2\lambda)\hat{i} - (2 - 2\lambda)\hat{j} + (6 + 2\lambda)\hat{k}$ तथा

$\vec{r} = (2\hat{j} - 5\hat{k}) + \mu(6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

25. (क) यदि बिंदु $(-1, -1, 2)$, $(2, 8, \lambda)$ तथा $(3, 11, 6)$ संरेख हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

(ख) $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सह-प्रारंभिक सदिश (co-initial vectors) हैं जो एक समांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ बनाते हैं और $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ है। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

खण्ड ग

इस खण्ड में लघु-उत्तरीय (SA) प्रकार के 6 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के 3 अंक हैं।

26. वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन f, जो $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ द्वारा प्रदत्त है :

(i) निरंतर वर्धमान है।

(ii) निरंतर ह्रासमान है।

27. (क) ज्ञात कीजिए :

$$\int \sqrt{4x^2 - 4x + 10}\ dx$$

अथवा

(ख) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

23. A spherical balloon has a variable diameter $\frac{2}{3}(2t + 1)$. Find the rate of change of its volume with respect to t.

24. Find the angle between the lines
$\vec{r} = (3 + 2\lambda)\hat{i} - (2 - 2\lambda)\hat{j} + (6 + 2\lambda)\hat{k}$ and
$\vec{r} = (2\hat{j} - 5\hat{k}) + \mu(6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$.

25. (a) Find the value of λ, if the points $(-1, -1, 2)$, $(2, 8, \lambda)$ and $(3, 11, 6)$ are collinear.

OR

(b) $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are two co-initial vectors forming the adjacent sides of a parallelogram such that $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Find the area of the parallelogram.

SECTION C

This section comprises 6 short answer (SA) type questions of 3 marks each.

26. Find the intervals in which the function f given by
$f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ is :

(i) strictly increasing.

(ii) strictly decreasing.

27. (a) Find :

$$\int \sqrt{4x^2 - 4x + 10}\ dx$$

OR

(b) Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

28. यदि $\hat{a}$, $\hat{b}$ तथा $\hat{c}$ मात्रक सदिश हैं तथा $\hat{a}.\hat{b} = \hat{a}.\hat{c} = 0$ है, $\hat{b}$ तथा $\hat{c}$ के बीच का कोण $\frac{\pi}{6}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\hat{a} = \pm 2 (\hat{b} \times \hat{c})$.

29. निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को ग्राफ द्वारा हल कीजिए :

व्यवरोधों $x + 4y \leq 8$

$2x + 3y \leq 12$

$3x + y \leq 9$

$x \geq 0, y \geq 0$

के अंतर्गत $Z = 2x + 3y$ का अधिकतमीकरण कीजिए।

30. (क) कक्षा XII के चार विद्यार्थियों को एक समस्या स्वतंत्र रूप से हल करने के लिए दी गई है। उनकी समस्या को हल कर पाने की संभावनाएँ क्रमश: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ तथा $\frac{1}{5}$ हैं। उनमें से अधिकतम एक द्वारा समस्या हल कर पाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

अथवा

(ख) एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है :

X	1	2	4	2k	3k	5k
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

यदि $E(X) = 2{\cdot}94$ है, तो k ज्ञात कीजिए और $P(X \leq 4)$ भी ज्ञात कीजिए।

31. (क) अवकल समीकरण $(2x^2 + y)\, dx = x\, dy$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

अथवा

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \text{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, यदि $x = 1$ के लिए $y = 0$ दिया गया है।

खण्ड घ

इस खण्ड में 4 दीर्घ-उत्तरीय (LA) प्रकार के प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के 5 अंक हैं।

32. (क) यदि $y = \cos x^2 + \cos^2 x + \cos^2 (x^2) + \cos (x^x)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

अथवा

28. If $\hat{a}$, $\hat{b}$ and $\hat{c}$ are unit vectors such that $\hat{a}.\hat{b} = \hat{a}.\hat{c} = 0$ and the angle between $\hat{b}$ and $\hat{c}$ is $\frac{\pi}{6}$, then prove that $\hat{a} = \pm 2 (\hat{b} \times \hat{c})$.

29. Solve the following LPP graphically :

Maximize $Z = 2x + 3y$

subject to the constraints $x + 4y \leq 8$

$2x + 3y \leq 12$

$3x + y \leq 9$

$x \geq 0, y \geq 0.$

30. (a) Four students of class XII are given a problem to solve independently. Their chances of solving the problem respectively are $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ and $\frac{1}{5}$. Find the probability that at most one of them will solve the problem.

OR

(b) The probability distribution of a random variable X is given below :

X	1	2	4	2k	3k	5k
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

Find k, if $E(X) = 2{\cdot}94$ and also find $P(X \leq 4)$.

31. (a) Find the general solution of the differential equation

$(2x^2 + y)\, dx = x\, dy.$

OR

(b) For the differential equation $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \text{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, find the particular solution, given that $y = 0$ when $x = 1$.

SECTION D

This section comprises 4 long answer (LA) type questions of 5 marks each.

32. (a) If $y = \cos x^2 + \cos^2 x + \cos^2 (x^2) + \cos (x^x)$, find $\frac{dy}{dx}$.

OR

(ख) उन अंतरालों को ज्ञात कीजिए जिनमें दिया गया फलन :

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

(i) निरंतर वर्धमान है।

(ii) निरंतर ह्रासमान है।

33. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ है, तो BA ज्ञात कीजिए तथा इसके उपयोग से नीचे दिए गए समीकरणों के निकाय को हल कीजिए :

$y + 2z = 8,$

$x - y = -1,$

$2x + 3y + 4z = 20$

34. (क) नीचे दी गई रेखाओं l_1 तथा l_2 में न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$l_1 : \vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 6\hat{j} + 12\hat{k})$$

और $l_2 : \vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(6\hat{i} + 9\hat{j} + 18\hat{k})$

अथवा

(ख) दर्शाइए कि रेखाएँ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ तथा $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु भी ज्ञात कीजिए।

35. समाकलन के प्रयोग से क्षेत्र $\{(x, y) : 0 \le y \le x^2,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le x \le 3\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(b) Find the intervals in which the function given by

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11 \text{ is :}$$

(i) strictly increasing.

(ii) strictly decreasing.

33. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, find BA and use this to solve the system of equations :

$y + 2z = 8$,

$x - y = -1$,

$2x + 3y + 4z = 20$

34. (a) Find the shortest distance between the lines l_1 and l_2 given by :

$$l_1 : \vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 6\hat{j} + 12\hat{k})$$

and $l_2 : \vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(6\hat{i} + 9\hat{j} + 18\hat{k})$

OR

(b) Show that the lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ and $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ intersect. Also, find their point of intersection.

35. Using integration, find the area of the region

$\{(x, y) : 0 \le y \le x^2,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le x \le 3\}$.

खण्ड ङ

इस खण्ड में 3 प्रकरण-अध्ययन आधारित प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के 4 अंक हैं।

प्रकरण अध्ययन – 1

36. एक खिड़की एक आयत के रूप में है जिसके ऊपर लंबाई पर एक समबाहु त्रिभुज अध्यारोपित है। माना आयताकार भाग की लंबाई x मीटर तथा चौड़ाई y मीटर है।

उपर्युक्त सूचना के आधार पर, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) यदि खिड़की का परिमाप 12 m है, तो x तथा y के बीच संबंध ज्ञात कीजिए। *1*

(ii) (i) में प्राप्त व्यंजक के प्रयोग से, खिड़की के क्षेत्रफल का केवल x के फलन के रूप में व्यंजक लिखिए। *1*

(iii) (क) आयत की वह विमाएँ ज्ञात कीजिए जिनसे खिड़की से अधिक-से-अधिक प्रकाश आ सके। ((ii) में प्राप्त व्यंजक का प्रयोग कीजिए) *2*

अथवा

(iii) (ख) यदि यह दिया गया हो कि खिड़की का क्षेत्रफल 50 m^2 है, तो खिड़की के परिमाप का x के पदों में व्यंजक ज्ञात कीजिए। *2*

प्रकरण अध्ययन – 2

37. त्योहारों के मौसम में, एक सोसाइटी के आवासीय कल्याण संघ ने साथ वाले पार्क में एक मेले का आयोजन किया। मेले का मुख्य आकर्षण, पार्क के एक कोने में लगा झूला था जो झूलते समय फलन $x^2 = y$ का परवलय पथ पूरा करता था।

उपर्युक्त सूचना के आधार पर, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) माना $f : N \to R,\ f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है। इसका परिसर क्या होगा ? *1*

(ii) माना $f : N \to N,\ f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है, तो जाँच कीजिए कि फलन एकैकी है या नहीं। *1*

(iii) (क) माना $f : \{1, 2, 3, 4 .....\} \longrightarrow \{1, 4, 9, 16 .....\}$ में $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि फलन एकैकी-आच्छादी है। *2*

अथवा

(iii) (ख) माना $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ में $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है, तो दर्शाइए कि f न तो एकैकी है और न ही आच्छादी है। *2*

SECTION E

This section comprises 3 case study based questions of 4 marks each.

Case Study – 1

36. A window is in the form of a rectangle surmounted by an equilateral triangle on its length. Let the rectangular part have length and breadth x and y metres respectively.

Based on the given information, answer the following questions :

(i) If the perimeter of the window is 12 m, find the relation between x and y. *1*

(ii) Using the expression obtained in (i), write an expression for the area of the window as a function of x only. *1*

(iii) (a) Find the dimensions of the rectangle that will allow maximum light through the window. (use expression obtained in (ii)) *2*

OR

(iii) (b) If it is given that the area of the window is 50 m^2, find an expression for its perimeter in terms of x. *2*

Case Study – 2

37. During the festival season, there was a mela organized by the Resident Welfare Association at a park, near the society. The main attraction of the mela was a huge swing installed at one corner of the park. The swing is traced to follow the path of a parabola given by $x^2 = y$.

Based on the above information, answer the following questions :

(i) Let $f : N \longrightarrow R$ is defined by $f(x) = x^2$. What will be the range ? *1*

(ii) Let $f : N \longrightarrow N$ is defined by $f(x) = x^2$. Check if the function is injective or not. *1*

(iii) (a) Let $f : \{1, 2, 3, 4 .....\} \longrightarrow \{1, 4, 9, 16 .....\}$ be defined by $f(x) = x^2$. Prove that the function is bijective. *2*

OR

(iii) (b) Let $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = x^2$. Show that f is neither injective nor surjective. *2*

प्रकरण अध्ययन – 3

38. एक संगठन की प्रबंध समिति के पद के लिए दो व्यक्ति प्रतिस्पर्धा कर रहे हैं। पहले तथा दूसरे व्यक्ति के चयन की प्रायिकता क्रमश: $0{\cdot}5$ तथा $0{\cdot}6$ है। इसके अतिरिक्त, यदि पहले व्यक्ति का चयन होता है, तो इसके द्वारा अपशिष्ट उपचार संयंत्र शुरू करने की प्रायिकता $0{\cdot}7$ है, जबकि दूसरे व्यक्ति का चयन होता है, तो उसकी संबंधित प्रायिकता $0{\cdot}4$ है।

उपर्युक्त सूचना के आधार पर, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) अपशिष्ट उपचार संयंत्र के शुरू होने की प्रायिकता क्या है ? *2*

(ii) चयन के बाद, यदि अपशिष्ट उपचार संयंत्र शुरू हो गया है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि पहले व्यक्ति ने इसे शुरू किया है ? *2*

Case Study – 3

38. Two persons are competing for a position on the Managing Committee of an organisation. The probabilities that the first and the second person will be appointed are $0 \cdot 5$ and $0 \cdot 6$ respectively. Also, if the first person gets appointed, then the probability of introducing waste treatment plant is $0 \cdot 7$ and the corresponding probability is $0 \cdot 4$, if the second person gets appointed.

Based on the above information, answer the following questions :

(i) What is the probability that the waste treatment plant is introduced ? *2*

(ii) After the selection, if the waste treatment plant is introduced, what is the probability that the first person had introduced it ? *2*